Метод моделирования в курсе математики факультетов подготовки учителей начальных классов

А.П. Тонких

*Современный курс математики факультетов подготовки учителей начальных классов немыслим без такого фундаментального понятия, как **модель**. Общая тенденция гуманитаризации математики ставит понятие модели в один ряд с такими понятиями, как множество, отображение, число, структура и т.д.*

Призванные поддержать и показать целостность научного знания, математические модели становятся общим языком науки, который позволяет глубже понять суть происходящих явлений в природе, обществе и сознании. Процесс математизации знаний, начавшийся с механики и физики, охватывает теперь не только все естественные науки, но и большинство гуманитарных наук. Стало привычным строить и исследовать модели биологических объектов, исторических процессов, мыслительной деятельности и т.п.

Курс математики факультетов подготовки учителей начальных классов содержит и систему математических моделей, и аппарат для исследования этих моделей, и методики использования результатов исследования моделей для решения прикладных задач. Однако большинство студентов, имея дело с моделями, изучая их (и не только в курсе математики), как правило, ничего о них не знают: не могут дать четкого определения понятия модели и моделирования, имеют смутное представление об их применении. Вызвано это тем, что в настоящее время и в школьных, и в вузовских программах и учебниках понятия модели и моделирования практически отсутствуют.

С апреля 2000 г. раздел «Математические модели» официально включен в Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования подготовки учителей начальных классов по специальности «031200 – педагогика и методика начального образования». Учитель начальных классов XXI в. призван первым:

– сформировать у школьников элементарные представления о моделях и моделировании;

– показать учащимся роль моделей в познании окружающей действительности;

– познакомить с соотношениями между явлениями реального (и абстрактного) мира и его математическими моделями;

– научить детей строить простейшие модели некоторых объектов и процессов, используя математическую символику;

– привить исследовательские навыки при работе с моделями и научить интерпретировать получаемые результаты.

Задача вуза – углубить соответствующие знания, развить умения и навыки у своих выпускников, чтобы они могли в будущем эффективно решать стоящие перед ними учебно-воспитательные задачи, применяя идеи и методы математического моделирования.

Первоначальное знакомство с моделями и моделированием начнем с определения этих понятий, не вдаваясь в философские аспекты моделирования как метода познания окружающего мира.

Под моделью* понимают мысленно представимую или материально реализованную систему, которая, отражая и воспроизводя объект исследования, способна замещать его при определенных условиях так, что изучение ее дает новую информацию об этом объекте.

* Слово «модель» произошло от латинских слов modus, modulus, означающих «мера», «образ», «способ».

В качестве модели могут выступать изображения, описания, схемы, чертежи, графики, уравнения, планы, карты, копии оригинала (уменьшенные или увеличенные), компьютерные программы и т.п. При этом следует помнить, что модель всегда является лишь отображением оригинала, и этот представитель в каком-либо отношении должен быть не только удобен для изучения свойств исследуемого объекта, но и позволяет перенести полученные при этом знания на исходный объект.

Обычно модель строится с тем расчетом, чтобы охватить только такие свойства оригинала, которые существенны в данной ситуации и являются объектом изучения. Модель, полностью воспроизводящая оригинал, перестает быть моделью.

Моделирование – это процесс построения моделей, а также изучения на них соответствующих явлений, процессов, систем объектов (оригиналов). Он заключается в том, что для исследования какого-либо явления или объекта выбирается или строится другой объект (модель), в каком-то отношении подобный исследуемому. Построенный или выбранный объект изучают, с его помощью решают исследовательские задачи, а затем результаты решения этих задач переносят на первоначальное явление или объект.

Пример. Метод моделирования во многих науках является средством, позволяющим устанавливать более глубокие и сложные взаимосвязи между теорией и опытом и способным заменить эксперимент. Целый ряд исследований вообще невозможен без моделирования потому, что:

а) эксперименты могут проводиться лишь на ныне существующих объектах, так как невозможно распространить эксперимент в область прошлого;

б) вмешательство в некоторые системы иногда имеет такой характер, что невозможно установить причины появившихся изменений (вследствие вмешательства или по другим причинам);

в) некоторые теоретически возможные эксперименты неосуществимы вследствие низкого уровня развития экспериментальной техники или ее высокой стоимости;

г) большую группу экспериментов, связанных с человеком, следует отклонить по морально-этическим соображениям.

Однако моделирование находит широкое применение не только из-за того, что может заменить эксперимент. Оно имеет большое самостоятельное значение и свои **преимущества**:

1. С помощью метода моделирования на одном комплексе данных можно разработать целый ряд различных мо-

делей, по-разному интерпретировать исследуемое явление и выбрать наиболее плодотворную из них для теоретического истолкования.

2. В процессе построения модели можно сделать различные дополнения к исследуемой гипотезе и получить ее упрощение.

3. В случае сложных моделей можно применять компьютерную технику.

4. Существует возможность проведения модельных экспериментов и т.д. Мы не будем приводить существующие классификации моделей и методов моделирования. Отметим лишь, что среди большого многообразия моделей выделяется особый класс математических моделей. **Математической моделью** называют приближенное описание какого-либо явления внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Математические модели описываются с помощью средств самой математики: языка, понятий, отношений, теорий. В отличие от естественно-научных и гуманитарных дисциплин математическая модель не требует создания материализованных объектов. Кроме того, если все другие науки изучают модели, то математика изучает «модели моделей». Потому ее материал в наилучшей степени соответствует задаче овладения методом моделирования.

Математической моделью достаточно сложного оригинала служит система уравнений (и неравенств) в самом широком понимании. Они могут содержать обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, интегральные уравнения, алгебраические и трансцендентные уравнения (и неравенства), набор вероятностно-статистических данных и т.д. К математическим моделям можно отнести и программы, составленные для компьютеров, которые отражают (моделируют) определенные процессы, описанные средствами математики, положенными в основу алгоритмов.

Построение модели, адекватно отражающей объект, – дело непростое, требующее специальных знаний и хорошей математической подготовки.

Метод математического моделирования сводит исследование внешнего мира к математическим задачам. **Процесс математического моделирования** состоит из четырех этапов:

1) *формализации*, т.е. перехода от реальной практической задачи (исследуемой ситуации) к построению адекватной математической модели и формулировке на ее основе абстрактной математической задачи;

2) *решения задачи путем преобразования модели (проведение математического исследования)*, т.е. получение в результате анализа в исследования модели выходных данных (теоретических сведений);

3) *интерпретации полученного результата*, когда решение формальной математической задачи исследуется на предмет его соответствия с исходной ситуацией, истолковывается в терминах исходной ситуации и применяется к ней;

4) *модернизации модели*, т.е. построение новой, более совершенной модели в связи с накоплением данных об изучаемом объекте или процессе.

Характерным примером, иллюстрирующим эти этапы, служит разработка модели Солнечной системы. Наблюдения звездного неба, начавшиеся еще в глубокой древности, привели к тому, что из всего многообразия небесных светил были выделены планеты, которые и стали объектом изучения*.

Следующим шагом явилось изучение закономерностей их движений, т.е. построение моделей и получение конкретных результатов. Модели Солнечной системы в процессе своего развития прошли через ряд усовершенствований по мере накопления экспериментальных данных и развития науки. Первой была модель Птолемея, созданная во II в. н. э., которая исходила из положения, что

* Вообще определение объектов и их взаимосвязей является исходным положением – аксиомой – гипотетической модели.

планеты и Солнце совершают движения вокруг Земли (так называемая геоцентрическая модель). В XVI в. появилась модель Н. Коперника, принципиально отличающаяся от предыдущей и полагающая, что планеты вращаются вокруг Солнца по окружности (т.е. гелиоцентрическая модель). Затем появились модели И. Кеплера (начало XVII в.), И. Ньютона (вторая половина XVII в.), описывающие движения планет на математическом языке. Модель Ньютона, основанная на законе всемирного тяготения, вполне удовлетворительно описывала движение известных планет и давала возможность вычислять их положение на небосводе. Но вот к 40-м годам XIX в. некоторые результаты этой модели стали тоже не согласовываться с экспериментальными данными: наблюдаемое движение Урана уклонялось от теоретически вычисляемого движения. Французский ученый-астроном У. Леверье расширил систему наблюдаемых планет новой гипотетической планетой (он назвал ее Нептуном) и, пользуясь новой математической моделью, определил все основные параметры этой планеты. В указанное время и на предсказанном им месте в 1846 г. астрономы убедились в реальном существовании еще одной планеты Солнечной системы*. Подобные вычисления, сделанные П. Лоуэлом, привели в 1930 г. к открытию девятой планеты, получившей название Плутон.

Велика роль моделирования в установлении истинности той или иной формы теоретического знания (аксиоматической теории, гипотезы и т.д.). Модель здесь можно рассматривать как орудие проверки того, действительно ли существуют такие связи, отношения, структуры, закономерности, которые формулируются в данной теории и выполняются в модели. А успешная работа модели – это практическое доказательство истинности теории, т.е. это часть экспериментального доказательства истинности этой теории.

Рассмотрим, как понятие модели находит свое применение при изучении аксиоматического метода в математике. Студентам следует пояснить, что, сформулировав основные понятия (объекты и отношения), а также аксиомы некоторой теории, мы имеем лишь логическую схему, в которой все понятия считаются «пустыми» (не имеющими конкретного смысла). Требование только одно: данные понятия должны формально удовлетворять аксиомам. Остальные свойства этих и новых понятий (т.е. тех, которые будут введены в дальнейшем) должны быть логически выведены из аксиом.

Математическую теорию, понимаемую только как логическую схему, принято называть аксиоматикой. В аксиоматике понятия – это лишь абстрактные объекты и отношения. В действительности их не существует. Например, в геометрии плоскость – это отвлеченное понятие, которое не имеет цвета, массы, температуры, толщины и т.п.; в аксиоматике Пеано натуральное число – объект, который не является ни результатом счета, ни характеристикой порядка предметов и т.п.

Придав основным объектам и отношениям аксиоматики конкретный смысл, мы получим ее модель. Так, моделями булевой алгебры в курсе математики факультетов подготовки учителей начальных классов являются алгебра множеств и алгебра высказываний.

Ценность моделей в этом случае заключается в том, что они дают возможность проверить логическую стройность аксиоматики. Отметим, что после того, как понятиям аксиоматики придан конкретный смысл, ее аксиомы становятся теоремами, которые уже нужно доказывать.

Интересные модели предоставляют в наше распоряжение аксиоматики евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского.

*Независимо от У. Леверье наличие новой планеты предсказал английский математик Дж. Адамсон.

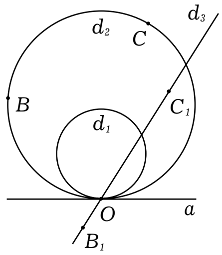

Рис. 1

Пример. *Модель № 1 евклидовой геометрии.* Условимся под словами «точка», «прямая» и т.д. подразумевать следующее (другими словами, придадим конкретный смысл основным понятиям). «Точка» – любая точка обыкновенной плоскости, кроме одной точки O; «прямая» – окружность в широком смысле, проходящая через точку O, т.е. любая окружность или прямая, проходящая через точку O*; «принадлежит» – в обычном смысле. Чтобы не усложнять пример, истолкование других слов («между», «конгруэнтен» и т.д.) приводить не будем.

Можно показать, что для таких «точек» и «прямых» выполняются все аксиомы евклидовой геометрии. Например аксиома «через две различные точки проходит одна и только одна прямая» становится в нашей модели теоремой «через три точки проходит единственная окружность в широком смысле». Докажем ее.

Пусть «точки» B и C (рис. 1) таковы, что точка O не лежит на прямой BC. Из планиметрии Евклида известно, что через три точки (B, C и O), не лежащие на одной прямой, проходит единственная окружность. Если же «точки» B и С таковы, что BC проходит через O, то B и C определяют единственную прямую, проходящую через O. Что и требовалось доказать. ▲

Студентам следует предложить в рамках этой модели дать определение параллельных прямых, сформулировать и доказать аксиому о параллельных.

Пример. *Модель № 2 евклидовой геометрии.* Введем словарь понятий. «Точка» – всякая упорядоченная пара чисел (x, y); «прямая» – множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению вида $x + By + C = 0$; «принадлежит» – «точка» $(x^0\ y^0)$ лежит на «прямой» $Ax + By + C = 0$, если $Ax_0 + By_0 + C = 0$; «между» – точка $B(x_2, y_2)$ лежит между $A\ (x_1, y_1)$ и $C(x_3, y_3)$, если выполняется хотя бы одно из следующих отношений: $x_1 < x_2 < x_3$, $x_3 < x_2 < x_1$, $y_1 < y_2 < y_3$ или $y_3 < y_2 < y_1$; «конгруэнтен» (для отрезков) – отрезок $A\ (x_1, y_1)\ B(x_2, y_2)$ «конгруэнтен» отрезку $C\ (x_3, y_3)\ D\ (x_4, y_4)$, если $(x_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2$ и т.д. ▲

Геометрия Лобачевского, не получившая признания при жизни ее автора, стала известной только после 1868 г., когда появилась ее первая модель.

Пример. *Модель Кели-Клейна геометрии Лобачевского.* Введем словарь понятий. «Плоскость» – фиксированный круг, «точка» – обычная точка, находящаяся внутри круга; «прямая» – хорда окружности (без концов); «лежать», «между» – в обычном смысле. Чтобы не усложнять пример, истолкование других слов приводить не будем.

Можно показать, что на этой модели выполняются все аксиомы геометрии Евклида, кроме аксиомы IV о параллельных. Вместо нее выполняется аксиома Лобачевского – «через точку вне прямой проходит более одной прямой, не пересекающей данную». На рис. 2а через точку O проходят три «прямые» d_1, d_2 *и* d_3, параллельные «прямой» a. ▲

Пример. *Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского.* Введем словарь понятий. «Точка» – обычная точка, находящаяся в верхней полуплоскости $(x > 0)$; «прямая» – луч, перпендикулярный оси X, а также полуокружности, опирающиеся на ось X (см. рис. 2б); «лежать», «между» – в обычном смысле. Чтобы не усложнять пример, истолкование других слов приводить не

* Можно считать, что обыкновенная прямая – это окружность с бесконечно большим радиусом.

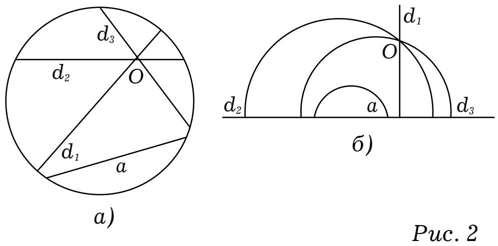

Рис. 2

будем. На рис. 2б через точку O проходят три «прямые» d_1, d_2 и d_3, параллельные «прямой» a. ▲

Студентам следует предложить в рамках рассмотренных моделей геометрий Евклида и Лобачевского дать определения других понятий, сформулировать и доказать некоторые аксиомы.

Есть и другие модели геометрии Лобачевского. Наличие моделей доказывает, что система аксиом Лобачевского является **непротиворечивой.**

Построение моделей геометрий Евклида и Лобачевского позволило решить проблему 2000-летней давности: можно ли **доказать** аксиому о параллельных, т.е. вывести ее из других аксиом? Теперь ясно, что нельзя, потому что эта аксиома **не зависит от остальных аксиом**. Независимость вытекает из того факта, что после замены аксиомы параллельности Евклида на аксиому параллельности Лобачевского мы вновь получаем непротиворечивую систему аксиом.

Переоценить значение открытия Лобачевского невозможно. Никакой другой математический результат не имел таких значительных последствий, как открытие неевклидовой геометрии. Дальнейшее развитие получил аксиоматический метод, теория моделей, возникли новые важнейшие разделы математики (основания геометрии, основания математики, математическая логика и др.). Идея Лобачевского, что наш мир только в «малом» подчиняется законам евклидовой геометрии, а в целом является неевклидовым, стала доминирующей идеей в науке. Один из основных выводов **теории относительности** как раз и заключается в том, что пространство искривлено, т.е. не является евклидовым.

Как мы уже отмечали, в ходе многовекового исторического развития математики сконструированы особые модели количественных отношений и пространственных форм окружающего мира. Это такие математические понятия, как число, функция, уравнение, геометрическая фигура и др. Хотя математическая модель и создается человеческим разумом, в дальнейшем она во многих случаях становится предметом объективного изучения. Познавая ее свойства, мы тем самым познаем и свойства отраженной моделью реальности, т.е. абстрактные математические открытия обнаруживают ранее неизвестные свойства окружающего мира. Например, представление, что числа бывают только, скажем, до миллиарда (а дальше чисел нет!), прямым наблюдением вряд ли может быть опровергнуто. Только создание математиками древности такого понятия натурального числа (такой модели), при котором натуральных чисел оказывалось бесконечно много, позволяет это сделать.

С помощью модели геометрии Лобачевского человечество пришло к пониманию искривленности пространства. Абстрактные функциональные зависимости дают возможность предсказывать развитие тех или иных процессов, модели геометрических тел позволяют на практике определять количественные характеристики окружающих нас предметов и т.д.

Для исследования существующих моделей и построения новых в математике разработаны специальные методы. Среди них известные студентам методы теории графов, теории вероятностей и математической статистики, математической логики и комбинаторики, аксиоматический метод, методы исследования элементарных функций, решения уравнений, доказательства утверждений, построения геометрических фигур, измерения величин и т.д.

Разработаны и особые методики использования на практике математических моделей, например приемы решения задач с помощью уравнений и систем уравнений, изучение различных явлений и процессов с помощью исследования соответствующих функций, графов, геометрических фигур и т.д.

Пример. Общеизвестно, что, разрезая конус плоскостями, не проходящими через его вершину, мы получаем в сечении различные кривые: окружности, эллипсы, параболы, гиперболы. Их называют **коническими сечениями**. Еще древнегреческие ученые начали заниматься изучением этих кривых, так как они встречаются в различных явлениях природы и в человеческой деятельности (в астрономии, в военном деле, в физике и т.п.). Однако лишь, когда появились уравнения конических сечений, полученные методом координат, изучение этих кривых значительно продвинулось вперед и были решены многие задачи, связанные с ними. Так, И. Кеплер (1609) открыл из наблюдений, а И. Ньютон (1687) теоретически обосновал, что планеты и кометы Солнечной системы движутся по этим кривым.

Заметим, что уравнения

$$x^2 + y^2 = r^2,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2,\ y = kx^2 \text{ и } y = \frac{k}{x}$$

выступают в качестве моделей окружности, эллипса, параболы и гиперболы соответственно, а эти кривые, в свою очередь, можно рассматривать как геометрические модели указанных уравнений. ▲

Несколько подробнее остановимся на том, как идеи метода моделирования находят свое применение в разделе «Текстовые задачи». Во-первых, само понятие текстовой задачи можно ввести, пользуясь понятием «модель».

Текстовая задача – это **словесная модель** ситуации, явления, события, процесса и т.д.; и, как в любой модели, в ней описывается не все событие или явление, а лишь его количественные и функциональные характеристики.

Во-вторых, понятие модели позволяет строго определить понятия «метод решения» и «способ решения» текстовой задачи. В ходе решения задачи выбранным методом строится «своя» математическая модель: запись решения по действиям (с объяснением) или выражение (если задача решается арифметическим методом); уравнение или система уравнений и неравенств (если задача решается алгебраическим методом); диаграмма или график (если она решается геометрическим методом) и т.д.

Пример. Даны три числа, сумма которых равна 100. Сумма двух из них равна 80, а первое число на 20 больше второго. Найти эти числа.

Решение задачи алгебраическим методом приводит к математической модели, которая представляет собой совокупность систем линейных уравнений. В самом деле, пусть x, y, z – данные числа. Без ограничения общности будем считать, что x – первое число, y – второе, z – третье. Тогда по условию имеем первые два уравнения:

$x + y + z = 100$,
$x = y + 20$.

В условии задачи не сказано, сумма каких именно двух чисел равна 80. Поэтому третье уравнение может иметь вид: либо $x + y = 80$, либо $x + z = 80$, либо $y + z = 80$. Следовательно, математическую модель задачи можно записать так:

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ x = y + 20, \\ x + y = 80; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ x = y + 20, \\ x + z = 80; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ x = y + 20, \\ y + z = 80. \end{cases}$$

Решив первую систему, найдем $x_1 = 50$, $y_1 = 30$, $z_1 = 20$; решив вторую систему, найдем $x_2 = 40$, $y_2 = 20$, $z_2 = 40$; решив третью систему, найдем $x_3 = 20$, $y_3 = 0$, $z_3 = 80$. Ответ: 50, 30, 20; 40, 20, 40; 20, 0, 80. ▲

В процессе решения текстовой задачи обычно выделяют три этапа математического моделирования.

I. Построение математической модели: анализ задачи и перевод условия задачи на математический язык, т.е. выделение исходных данных и искомых величин, описание связей между ними.

II. Решение задачи в рамках выбранной математической модели: нахождение значения выражения, выполнение арифметических действий, решение уравнений и неравенств.

III. Интерпретация результатов: перевод полученных решений на естественный язык, получение значений искомых величин.

IV. Модернизация модели – этот этап, как правило, является необязательным. Однако в некоторых случаях полезно в учебных и познавательных целях произвести анализ выполненного решения, в результате которого можно установить, нет ли другого, более рационального решения, какие выводы можно сделать из полученного решения, можно ли задачу обобщить и т.д.

Первый этап, связанный с выявлением зависимостей между искомыми и данными, а также данных между собой, является наиболее сложным и часто вызывает затруднения. Для облегчения процесса решения задачи и скорейшего нахождения пути решения от словесной модели ситуации, описанной в задаче, сначала переходят к **вспомогательной** (делают рисунки, строят схемы, составляют таблицы, краткую запись условия и т.п.), а уж затем – к математической модели.

При построении вспомогательных моделей задач происходит углубленный анализ задачи, и само построение вспомогательных моделей выступает в качестве эффективного средства такого анализа. Любая вспомогательная модель задачи должна:

1) строиться на основе анализа текста задачи и «опредмечивать» абстрактные понятия;

2) нести информацию лишь о существенных признаках объектов задачи;

3) давать возможность непосредственно усматривать зависимости между величинами, о которых идет речь в задаче, и допускать практические преобразования. В качестве вспомогательных моделей могут выступать схематизированные и знаковые модели.

Схематизированные модели подразделяются на вещественные (предметные) и графические. **Вещественные модели** обеспечивают физическое действие с предметами: палочками, пуговицами, полосками бумаги и т.п. К этому виду моделей относят и мысленное воссоздание реальной ситуации, описанной в задаче. **Графическими моделями** являются: рисунок, условный рисунок, чертеж, схематичный чертеж (схема).

К **знаковым моделям**, выполненным на естественном языке, относят краткую запись задачи, таблицы. К знаковым моделям, выполненным на математическом языке (они же являются математической моделью задачи), относят запись решения задачи по действиям, запись выражения, составление уравнений или систем уравнений и неравенств.

Не любая краткая запись, рисунок или чертеж, выполненные для данной задачи, являются ее моделями. Вспомогательные модели текстовых задач должны отражать все ее объекты и все отношения между ними, указывать требования. Эти модели строятся в ходе разбора содержания и анализа задачи, вместе с тем построение таких моделей организует и направляет детальный и глубокий анализ задачи.

Обязательным элементом при работе с моделью на третьем этапе является проверка решения. Назначения проверки – установление адекватности построенной модели задачи всем ее условиям, так как логичные рассуждения на других этапах решения задачи не гарантируют правильность ее решения.

В заключение отметим, что по условию одной и той же задачи можно составить несколько вспомогательных моделей, каждая из которых позволяет найти свой способ решения.

Следующий пример поясняет не только последнюю мысль, но и некоторые предыдущие рассуждения об использовании метода моделирования при решении текстовых задач.

Пример. Во время первой семидневной экспедиции на Марс экипаж космического корабля готовил 3 капсулы с пробами грунта за один день. Во время второй семидневной экспедиции, имея более совершенное оборудование, экипаж стал готовить 5 капсул за один день. На сколько больше капсул с грунтом заготовлено во время второй экспедиции, чем во время первой?

Решение.

I. Пользуясь вспомогательной моделью, представленной на рис. 3а, получаем следующее арифметическое решение:

1) 5 – 3 = 2 (к.) – на столько больше капсул ежедневно заготавливалось во время второй экспедиции, чем во время первой;

2) 2 – 7 = 14 (к.) – на столько больше капсул заготовлено во время второй экспедиции, чем во время первой.

II. Вспомогательная модель в виде чертежа показана на рис. 3б. Арифметическое решение может быть таким:

1) 3 · 7 = 21 (к.) – заготовлено во время первой экспедиции;

2) 5 · 7 = 35 (к.) – заготовлено во время второй экспедиции;

3) 35 – 21 = 14 (к.) – на столько больше капсул заготовлено во время второй экспедиции, чем во время первой.

III. Вспомогательная модель в виде графика показана на рис. 3в. Здесь по оси Ox отложены дни, на оси Oy – количество капсул. Количество заготовленных капсул прямо пропорционально числу дней, поэтому можно считать, что луч OB – график заготовки капсул во время первой экспедиции, луч OC – второй. Пусть точка A соответствует семи дням, тогда ординаты точек B и C соответствуют количеству капсул, заготовленных во время первой и второй экспедиций соответственно, а длина отрезка BC – их разности, т.е. искомому задачи.

Пересечем оба графика произвольной прямой $A_1C_1 \parallel Oy$ и положим, что точка A_1 соответствует одному дню, а ординаты A_1B_1 и A_1C_1 изображают соответственно 3 капсулы и 5 капсул. Тогда отрезок B_1C_1 соответствует двум капсулам, т.е. $B_1C_1 = 2$. Треугольники OB_1C_1 и OBC подобны (три угла одного треугольника равны трем углам другого треугольника), OA_1 – высота треугольника OB_1C_1, OA – высота треугольника OBC. Из подобия треугольников следует пропорция: $BC : B_1C_1 = OA : OA_1$, из которой находим

$$BC = \frac{OA \cdot B_1C_1}{OA_1} = \frac{7 \cdot 2}{1} = 14 \text{ (к.)}.$$

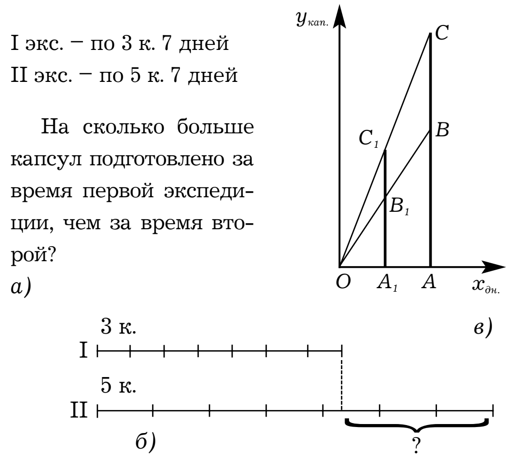

Рис. 3

Ответ: на 14 капсул было больше заготовлено во время второй экспедиции, чем во время первой.

Говоря о моделировании, не следует забывать, что помимо всего прочего оно еще является тем учебным действием и средством, без которого невозможно полноценное обучение. Как учебное средство оно может использоваться для построения:

1) модели формирования умственных действий, которая может быть представлена в виде учебной карты, где схематически перечислены все операции, которые надо выполнить для осуществления изучаемого умственного действия;

2) модели изучаемого раздела (темы) конкретной учебной дисциплины, которую в виде некоторого графа можно использовать студентам для планирования учебной работы, для само-

контроля и самооценки изученного материала;

3) модели изученного материала, которую в виде таблицы или схемы можно использовать для лучшего его запоминания, для обобщения;

4) модели урока или какого-либо другого занятия, которая представляет собой его план-конспект, и т.п.

Для того чтобы студенты овладели моделированием как методом научного познания, недостаточно познакомить их только с трактовкой понятий модели и моделирования, демонстрируя разные математические модели и показывая процесс моделирования при решении задач. Необходимо научить студентов самостоятельно строить и исследовать модели, изучать какие-либо явления с помощью моделирования, использовать идеи этого метода в повседневной жизни и работе. Решая математические задачи и понимая, что они представляют собой модели некоторых реальных объектов и процессов, студенты приобретут необходимые знания, навыки и умения, овладеют методом математического моделирования.

Мы рассмотрели лишь несколько разделов курса, в ходе изучения которых происходит усвоение студентами данного метода. Не менее содержательными в этом смысле являются и многие другие разделы и темы, например такие, как «Математические утверждения и их структура», «Соответствия и отношения», «Элементы теории графов», «Величины и их измерение», «Функции и их графики» и др.

Литература

1. *Бескин Л.Н.* Стереометрия: Пос. для учителей средней школы. – М.: Просвещение, 1971.

2. *Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.* Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. – М.: Наука, 1983.

3. *Ганеев Х.Ж.* Теоретические основы развивающего обучения математике: Монография. – Екатеринбург: Урал. гос. пед. ун-т, 1997.

4. *Демидова Т.Е., Тонких А.П.* Текстовые задачи и методы их решения. – М.: Изд-во МГУ, 1999.

5. *Фридман Л.М.* Теоретические основы методики обучения математике: Пос. для учителей, методистов и студентов пед. высш. уч. заведений. – М.: Моск. психолого-социальный ин-т, 1998.

Александр Павлович Тонких *– канд. физ.-мат. наук, доцент Брянского государственного университета.*